Интегралы и дифференциальные уравнения

Экзамен

2 семестр

GitHub: malyinik

2024 г.

Содержание

1 Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла

Первообразная

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Свойства первообразной

Свойство 1.
Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x) + C$ — первообразная функции $f(x)$ на $(a;b)$, где $\forall C$ — $const$.

Свойство 2.
Если $\Phi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$: $\Phi'(x) = 0$, то $\Phi(x) = const$, $\forall x \in (a;b)$.

Свойство 3 *(Существование первообразной)*.
Любая непрерывная функция на $(a;b)$ имеет множество первообразных на этом интервале, причём любые две из них отличаются друг от друга на константу.

$$\Phi(x),\ F(x) \text{ — первообразные функции } f(x) \text{ на } (a;b)$$
$$\Phi(x) - F(x) = const$$

Свойства неопределённого интеграла

Свойство 1.
Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)}$$

Свойство 2.
Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}$$

Свойство 3.
Неопределённый интеграл от дифференциала от некоторой функции равен сумме этой функции и константы.

$$\boxed{\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C}, \quad \forall C - const$$

Свойство 4.
Константу можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx}, \quad \lambda \neq 0$$

Свойство 5.
Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на $(a;b)$ имеют первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, имеет первообразную на $(a;b)$, причём $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$:

$$\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx$$

Свойство 6 *(Инвариантность формы интегрирования)*.
Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $C - const$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $C - const$, $u = \varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция.

Теорема об интегрировании по частям

Теорема 1.
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемые, тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\boxed{\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du}$$

Доказательство.
Рассмотрим произведение $u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$
Дифференциал:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Выразим $u \cdot dv$:

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Интегрируем:

$$\int u\,dv = \int \Big(d(uv) - v\,du \Big)$$

По свойству неопределённого интеграла (5):

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

По свойству неопределённого интеграла (3):

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

■

2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей

Теорема 2 *(О разложении правильной рациональной дроби на простейшие)***.**
Любая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой можно разложить на множители:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_n)^{k_n} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

может быть представлена и при том единственным образом в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{C_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_n}{(x - x_n)} + \frac{B_n}{(x - x_n)^2} + \ldots + \\ + \frac{C_n}{(x - x_n)^{k_n}} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{M_{s_1} x + N_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \ldots + \\ + \frac{E_1 x + F_1}{x^2 + p_m x + q_m} + \ldots + \frac{E_{s_m} x + F_{s_m}}{(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} A_1,\ B_1,\ \ldots,\ C_1 \\ A_n,\ B_n,\ \ldots,\ C_n \\ M_1,\ N_1,\ \ldots,\ M_{s_1},\ N_{s_1} \\ E_1,\ F_1,\ .,\ E_{s_m},\ F_{s_m} \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R} \qquad \begin{matrix} x^2 + p_1 x + q_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^2 + p_m x + q_m \end{matrix} \quad \text{не имеют действительных корней}$$

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,\ s_1,\ \ldots,\ s_m \in \mathbb{N}$$

2.1 Интегрирование простейших рациональных дробей

2.1.1 $\frac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x - a}\, dx = A \int \frac{dx}{x - a} = A \int \frac{d(x - a)}{x - a} = A \cdot \ln|x - a| + C, \quad \forall C - const$$

2.1.2 $\frac{A}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{A}{(x - a)^k}\, dx = A \int \frac{dx}{(x - a)^k} = A \int \frac{d(x - a)}{(x - a)^k} = A \int (x - a)^{-k}\, d(x - a) = A \cdot \frac{(x - a)^{-k+1}}{-k + 1} + C,$$
$$\forall C - const$$

2.1.3 $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad 4q - p^2 > 0, \quad \boxed{q - \frac{p^2}{4} > 0} \tag{$*$}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \left| \begin{aligned} & x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \\ & = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \overset{(*)}{=\!=} \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + b^2 \end{aligned} \right| = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + b^2}\,dx =$$

$$= \left| x + \frac{p}{2} = t \quad x = t - \frac{p}{2} \quad dx = dt \right| = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+b^2}\,dt =$$

$$= M\int \frac{t}{t^2+b^2}\,dt + \left(N - \frac{p}{2}M\right)\int \frac{dt}{t^2+b^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+b^2)}{t^2+b^2} + \left(N-\frac{p}{2}M\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|t^2+b^2| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{b}\operatorname{arctg}\frac{t}{b} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N-\frac{p}{2}M\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C, \quad \forall C - const$$

3 Сформулировать свойства определенного интеграла

3.1 Свойства определённого интеграла

Теорема 3.
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

Теорема 4 *(Аддитивность определённого интеграла)***.**
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a;c]$, $[c;b]$ $(a < c < b)$, то она интегрируема на $[a;b]$ и верно равенство

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Теорема 5.
Если C — *const*, то

$$\boxed{\int_a^b C\,dx = C\cdot(b-a)}$$

Теорема 6.
Если функции $f_1(x),\ f_2(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то их линейная комбинация

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x),\ \text{где } \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

интегрируема на $[a;b]$ и верно равенство:

$$\int_a^b \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\, dx$$

Следствие 6.1.

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

Теорема 7 *(О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции)*.
Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a;b]$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0}$$

Теорема 8 *(Об интегрировании неравенства)*.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx}$$

Теорема 9 *(Об оценке модуля определённого интеграла)*.
Если функция $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $[a;b]$, то справедливо неравенство

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big| dx}$$

Теорема 10 *(О среднем значении для определённого интеграла)*.
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\exists\, c \in [a;b]\colon f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Теорема 11 *(Об оценке определённого интеграла)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon m \leqslant f(x) \leqslant M,\ g(x) \geqslant 0$, $m,\ M \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\boxed{m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx}$$

Следствие 11.1. $g(x) \equiv 1,\ \forall x \in [a;b]$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

3.2 Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции

Теорема 7 *(О сохранении определённым интегралом знака подынтегральной функции)***.**
Если $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на $[a;b]$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Δx_i — длины отрезков разбиения $\quad \Delta x_i > 0$
$f(\xi_i) \geqslant 0$ по условию

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0,\ i = \overline{i,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0 \quad \text{как сумма неотрицательных чисел}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \geqslant 0$$ по следствию из теоремы *о сохранении функцией знака своего предела*

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

■

3.3 Доказать теорему об оценке определенного интеграла

Теорема 11 *(Об оценке определённого интеграла)*.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\colon m \leqslant f(x) \leqslant M,\ g(x) \geqslant 0$, $m,\ M \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\boxed{m \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx}$$

Доказательство.
Так как $\forall x \in [a;b]$ верны неравенства

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad |\cdot g(x)$$
$$g(x) \geqslant 0 \qquad m, M \in \mathbb{R}$$

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

По теореме 8 и 6:

$$m \int_a^b g(x) \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int_a^b g(x)\,dx$$

■

3.4 Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла

Теорема 9 *(Об оценке модуля определённого интеграла)*.
Если функция $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $[a;b]$, то справедливо неравенство

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx}$$

Доказательство.
$\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство

$$-\big|f(x)\big| \leqslant f(x) \leqslant \big|f(x)\big|$$

По теореме 6 и 8:

$$-\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx$$

Сворачиваем двойное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

■

3.5 Доказать теорему о среднем для определенного интеграла

Теорема 10 *(О среднем значении для определённого интеграла)***.**
Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$$\exists\, c \in [a;b] \colon\ f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Доказательство.
Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Вейерштрасса* она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.
То есть $\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a;b] \colon m \leqslant f(x) \leqslant M$
По теореме 8:

$$\int_a^b m\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b M\, dx$$

По теореме 6:

$$m \int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M \int_a^b dx$$

По теореме 5:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b-a) \quad \mid : (b-a)$$

Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по теореме *Больцано-Коши* она принимает все свои значения между наибольшим и наименьшим значением.

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M$$

По теореме *Больцано-Коши* $\exists\, c \in [a;b] \colon$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

■

3.6 Вывести формулу Ньютона-Лейбница

Теорема 12.
Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на $[a;b]$. Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

где $F(x)$ — первообразная $f(x)$.

Доказательство.
Пусть $F(x)$ первообразная $f(x)$ на $[a;b]$. По следствию из теоремы 16 $I(x)$ — первообразная $f(x)$ на $[a;b]$.
По свойству первообразной (**св.3**):

$$I(x) - F(x) = C$$
$$I(x) = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \text{ где } C \text{ — } const \qquad (\vee)$$

• $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$
$$0 = F(a) + C$$
$$C = -F(a)$$

$C = -F(a)$ подставим в $(\vee)$:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

• $x = b$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

■

3.7 Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат

Теорема 13.
Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом T. Тогда
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Доказательство.
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{T+a} f(x)\,dx$$
$$\int_T^{T+a} f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} t = x - T, & x = t + T,\ dx = dt \\ x_{\text{н}} = T, & t_{\text{н}} = 0 \\ x_{\text{в}} = T + a, & t_{\text{в}} = a \end{matrix} \right| = \int_0^a f(t+T)\,dt \xlongequal{\text{период.}} \int_0^a f(t)\,dt$$
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \cancel{-\int_0^a f(x)\,dx} + \int_0^T f(x)\,dx + \cancel{\int_0^a f(x)\,dx}$$
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

■

Теорема 14.
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[-a; a]$, где $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. Тогда
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ 0, & f \text{ — нечётная} \end{cases}$$

Доказательство.
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \ominus$$
$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = -t, & dx = -dt \\ x_{\text{н}} = -a, & t_{\text{н}} = a \\ x_{\text{в}} = 0, & t_{\text{в}} = 0 \end{matrix} \right| = \int_a^0 f(-t)\,(-dt) = \int_0^a f(-t)\,dt =$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^a f(t)\,dt, & f \text{ — чётная} \\ -\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt, & f \text{ — нечётная} \end{cases}$$
$$\ominus \int_0^a f(x)\,dx + \begin{cases} \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ -\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — нечётная} \end{cases} = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ — чётная} \\ 0, & f \text{ — нечётная} \end{cases}$$

■

3.8 Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла

Теорема 15.
Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;b]$. Тогда имеет место равенство

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Доказательство.
Рассмотрим произведение функций $u \cdot v$.
Дифференцируем:

$$d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$$
$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Интегрируем:

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b \big(d(uv) - v\,du\big) = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

■

4 Дать определение интеграла с переменным верхним пределом. Сформулировать и доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом

Определение 2. **Определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования** от непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$ называется интеграл вида

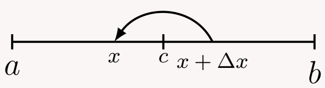
$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(t)\,dt}, \text{ где } x \in [a;b]$$

Теорема 16 *(О производной $I(x)$).*
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ верно равенство

$$\boxed{\big(I(x)\big)' = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)}$$

Доказательство.

$$\big(I(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} \overset{\text{T34}}{=\!=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \overset{*}{=} f(x)$$

$*$: 

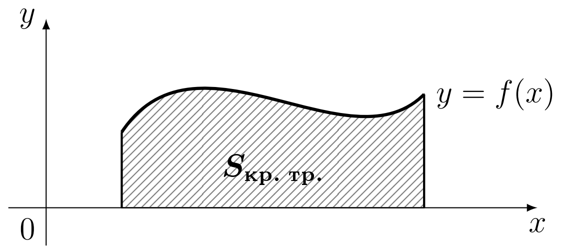
при $\Delta x \to 0$ $\quad x + \Delta x \to x \quad c \to x$

■

Следствие 16.1. Функция $I(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$, так как по теореме 16 $\big(I(x)\big)' = f(x)$.

5 Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла

Геометрический смысл



Определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

$$S_{\text{кр. тр.}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Теорема об интегрировании подстановкой

Теорема 17.
Пусть

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$
2. $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \in [t_1; t_2]$
3. при $t \in [t_1; t_2]$ значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы $[a; b]$
4. $\varphi(t_1) = a,\ \varphi(t_2) = b$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t), & x_{\text{н}} = a, & t_{\text{н}} = t_1 \\ dx = \varphi'(t)\,dt, & x_{\text{в}} = b, & t_{\text{в}} = t_2 \end{vmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$

Доказательство.
Так как

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а
2. $x = \varphi(t)$ непрерывна на $[t_1; t_2]$,

то сложная $y = f\big(\varphi(t)\big)$ непрерывна на $[t_1; t_2]$ по теореме *о непрерывности сложной функции.*

Так как $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а функция $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ — непрерывна на $[t_1; t_2]$, то существует определённый и неопределённый интеграл от этих функций.

Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$. В силу инвариантности неопределённого интеграла $F\big(\varphi(t)\big)$ — первообразная функции $f\big(\varphi(t)\big)$ на $[t_1; t_2]$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \xlongequal{\text{Н-Л}} \boxed{F(b) - F(a)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = F\big(\varphi(t)\big)\Big|_{t_1}^{t_2} \xlongequal{\text{Н-Л}} F\big(\varphi(t_2)\big) - F\big(\varphi(t_1)\big) = \boxed{F(b) - F(a)}$$

■

Замечание.
⊕ При замене переменной в определённом интеграле обратную замену не делают.
⊖ Нужно не забыть изменить пределы интегрирования.

6 Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a;+\infty)$, интегрируема на $[a;b] \subset [a;+\infty)$. Тогда определена функция

$$\boxed{\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx} \text{ на } [a;+\infty) \tag{1}$$

как определённый интеграл с переменным верхним пределом интегрирования.

Определение 3. Предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ или **несобственным интегралом 1-го рода** и обозначается

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Phi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx} \tag{2}$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **сходится**.
Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен ∞, то несобственный интеграл в левой части равенства (2) **расходится**.

6.1 Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 18 *(Признак сходимости по неравенству)***.**
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b] \subset [a;+\infty)$, причём

$$\forall x \geqslant a\colon 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Тогда:

1. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится
2. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится

Доказательство.
$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится $\overset{\textbf{(опр. 3)}}{\Rightarrow}$ по определению несобственного интеграла 1-го рода

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)\,dx = C \quad C \text{ — число}$$

Так как $\forall x \geqslant a\colon g(x) \geqslant 0$

$$\Phi(b) = \int_a^b g(x)\,dx \leqslant C, \quad b > a$$

По условию: $\forall x \geqslant a\colon 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$
Интегрируем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant C$$

Так как $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \geqslant a$ и $b > a$, то функция

$$\Psi(b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ монотонно возрастает и ограничена сверху}$$

Утверждение: монотонная и ограниченная сверху функция при $x \to +\infty$ имеет конечный предел.
По утверждению функция $\Psi(b)$ имеет конечный предел при $x \to +\infty$, то есть

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Psi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ — конечный предел}$$

■

Доказательство (Метод от противного)**.**
Дано: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — расходится
Предположим, что $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится
Тогда по первой части теоремы:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ — сходится}$$

А это противоречит условию теоремы $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится ■

6.2 Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 19 *(Предельный признак сходимости)*.
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b] \subset [a; +\infty)$ и $\forall x \geqslant a\colon\ f(x) \geqslant 0,\ \ g(x) > 0$. Если существует конечный предел:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \tag{3}$$

то $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.
Из (3) $\Rightarrow$ по определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, M(\varepsilon) > 0\colon \forall x > M \ \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$
$$\lambda - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \lambda + \varepsilon$$
$$(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon) \cdot g(x) \quad \forall x > M \tag{$*$}$$

$\boxed{\text{1 шаг}}$ Рассмотрим $f(x) < (\lambda + \varepsilon) g(x)$
Интегрируем:
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < (\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$
Число $(\lambda + \varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла.
Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — сходится, тогда:

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — сходится}$$

По теореме 18 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится.
Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда по теореме 18

$$(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — расходится } \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — расходится}$$

$\boxed{\text{2 шаг}}$ Рассмотрим $(\lambda - \varepsilon) \cdot g(x) < f(x)$
Интегрируем:
$$(\lambda - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)\,dx < \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$
$(\lambda - \varepsilon)$ не влияет на сходимость/расходимость несобственного интеграла

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ — сходится, тогда по теореме 18

$$(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — сходится } \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ — сходится}$$

Пусть $(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится, тогда $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ — расходится

По теореме 18 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ и } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ сходятся и расходятся одновременно}$$

■

6.3 Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема 20 *(Признак абсолютной сходимости)***.**
Пусть функция $f(x)$ знакопеременна на $[a;+\infty)$. Если функции $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на любом отрезке $[a;b]\subset[a;+\infty)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по бесконечному промежутку $[a;+\infty)$ сходится, то сходится и несобственный интеграл от функции $f(x)$ по $[a;+\infty)$, причём абсолютно.

Доказательство.
Так как $\forall x\in[a;+\infty)$ верно неравенство

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)| \quad \Big|+|f(x)|$$
$$0\leqslant f(x)+|f(x)|\leqslant 2|f(x)|$$

По условию $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow$ $2\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится.

По теореме 18 (*признак сходимости по неравенству*):

$$\int_a^{+\infty}\big(f(x)+|f(x)|\big)\,dx \text{ — сходится}$$

Рассмотрим

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\underbrace{\int_a^{+\infty}\big(f(x)+|f(x)|\big)\,dx}_{\text{сх-ся по Т18}}-\underbrace{\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx}_{\text{сх-ся по условию}}$$

По определению сходящегося несобственного интеграла $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится
По определению абсолютной сходимости $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно ■
(**опр.26**)

7 Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a;b)$, а в точке $x=b$ терпит разрыв 2-го рода. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a;\eta]\subset[a;b)$. Тогда на $[a;b)$ определена функция

$$\Phi(\eta)=\int_a^\eta f(x)\,dx \tag{1}$$

как интеграл с переменным верхним пределом.

Определение 4. Предел функции $\Phi(\eta)$ при $\eta\to b-$ называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ на $[a;b)$ или **несобственным интегралом 2-го рода** и обозначается

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\eta\to b-}\Phi(\eta)=\lim_{\eta\to b-}\int_a^\eta f(x)\,dx} \tag{2}$$

Если предел в правой части равенства (2) существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a;b)$ **сходится**.
Если предел в правой части равенства (2) не существует или равен ∞, то несобственный интеграл от неограниченной функции $f(x)$ по $[a;b)$ **расходится**.

Теорема 21 *(Признак сходимости по неравенству)*.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $\forall$ отрезке $[a;\eta]\subset[a;b)$, являются неотрицательными $\forall x\in[a;b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв 2-го рода, причём выполнено неравенство $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. Тогда

1. Если несобственный интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.
2. Если собственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ расходится.

Теорема 22 *(Предельный признак сходимости)*.
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $\forall$ отрезке $[a;\eta]\subset[a;b)$, являются неотрицательными $\forall x\in[a;b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв 2-го рода. Если существует конечный положительный предел

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda>0$$

то $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 23 *(Признак абсолютной сходимости)*.
Пусть функция $f(x)$ знакопеременна на $[a;b)$. Если $f(x)$ и $|f(x)|$ интегрируемы на $\forall\,[a;\eta]\subset[a;b)$ и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ сходится по этому промежутку, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ сходится, причём абсолютно.

8 Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geqslant 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $\forall x \in [a; b]$: $f(x) \geqslant 0$. Из геометрического смысла определённого интеграла:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx} \tag{1}$$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$
2. $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$ — отрезки разбиения
   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длины отрезков разбиения
3. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$ $\qquad f(\xi_i)$
   Криволинейную трапецию с основанием Δx_i заменяем прямоугольником длины $f(\xi_i)$.
   Криволинейная трапеция с основанием $[a; b]$ заменяется на ступенчатую фигуру.
4. $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$
   $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма
5. $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = S}$

9 Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ — полярные координаты точки, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$, где r и φ — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры

> **Определение 5.** **Криволинейный сектор** — это фигура, ограниченная лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и графиком непрерывной кривой $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$

Этапы вывода формулы:

1. Разбиваем сектор A_0OA_n лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ на углы $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, ..., $\angle A_{n-1}OA_n$
   $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ — величина $\angle A_{i-1}OA_i$ в радианах
   $\lambda = \max\limits_i \Delta\varphi_i,\ i = \overline{1, n}$

2. $\forall$ выберем и проведём $\Psi_i,\ \Psi_i \in \angle A_{i-1}OA_i$
   Находим $r = r(\Psi_i)$
   $M_i\big(\Psi_i,\ r(\Psi_i)\big), \quad M_i \in \angle A_{i-1}OA_i, \quad M_i \in r = r(\varphi)$

3. Заменяем каждый i-ый криволинейный сектор на круговой сектор $R = r(\Psi_i),\ i = \overline{1, n}$
   $S_i = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \Delta\varphi_i$ — площадь i-го кругового сектора
   $R = r(\Psi_i)$
   $$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i$$

4. Вычисляем предел
   $$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r^2(\Psi_i) \cdot \Delta\varphi_i = \boxed{\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi = S} \tag{2}$$

10 Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geqslant 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения

Пусть T — тело, S — площадь сечения тела плоскостью перпендикулярной Ox или площадь поперечного сечения.
$S = S(x)$ — непрерывная функция на $[a; b]$

1. Разбиваем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$
   Отрезки разбиения $[x_{i-1}; x_i]$
   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка разбиения
   $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i, \ i = \overline{1, n}$

2. Проводим плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 = a \\ \ldots\ldots\ldots \\ x = x_{i-1} \\ x = x_i \\ \ldots\ldots\ldots \\ x = x_n = b \end{cases} \text{— эти плоскости разбивают тело } T \text{ на слои}$$

3. $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i], \ i = \overline{1, n}$
   Проводим плоскость $x = \xi_i$. Находим $S(\xi_i)$.
   Каждый слой заменяем цилиндром с основанием $S(\xi_i)$ и высотой $\Delta x_i, \ i = \overline{1, n}$

4. $V_{\text{ц}} = S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — объём i-го цилиндра
   $\sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — интегральная сумма

5. Вычисляем предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \boxed{\int_a^b S(x)\, dx = V_T} \tag{3}$$

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Пусть $\forall x \in [a; b] \colon f(x) \geqslant 0$
Поперечное сечение — круг
$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = (R = y) = \pi y^2$

$$\boxed{V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2\, dx} \tag{4}$$

Пусть криволинейная трапеция ограничена графиками непрерывных функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$

$$V_{Ox} = V_{Ox}^1 - V_{Ox}^2 = \pi \int_a^b y_1^2\, dx - \pi \int_a^b y_2^2\, dx = \boxed{\pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx = V_{Ox}} \tag{5}$$

11 Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y — декартовые координаты точки, $a \leqslant x \leqslant b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$.
$M_0(x_0, y_0) \quad M(x, y)$
Δx — приращение x $\quad \Delta y$ — приращение y

$$\begin{matrix} x \to x + \Delta x \\ y \to y + \Delta y \end{matrix} \quad M(x, y) \to M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

l_0 — $\overset{\frown}{M_0M}$ — дуга кривой $\quad \Delta l$ — приращение дуги кривой $\quad \Delta l = \overset{\frown}{MM_1}$
Найдём l'_x — ?
$l'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta l}{\Delta x}$
$\triangle MM_1A \quad MA = \Delta x \quad AM_1 = \Delta y$

$MM_1^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | \cdot \Delta l^2 \mid : \Delta l^2$
$\left(\dfrac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot (\Delta l)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad | : \Delta x^2$
$\left(\dfrac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$

Вычислим предел при $\Delta x \to 0$.
Левая часть:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = \left| \begin{matrix} \text{при } \Delta x \to 0 \quad M \to M_1 \\ \Delta l \to MM_1 \quad \text{дуга} \ \to \ \text{хорде} \end{matrix} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} 1^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\Delta x}\right)^2 = (l'_x)^2$$

Правая часть:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right) = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + (y'_x)^2$$

Получаем:

$$\begin{aligned} (l'_x)^2 &= 1 + (y'_x)^2 \\ l'_x &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad | \cdot dx \\ l'_x \, dx &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx \\ dl &= \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx \end{aligned} \tag{$\vee$}$$

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} \, dx} \tag{6}$$

12 Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geqslant 0$, где r и φ — полярные координаты точки, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой

$$(\vee) = dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dx)^2}}\, dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dl \tag{$\vee\vee$}$$

Пусть $r = r(\varphi)$ — непрерывная на $[\alpha; \beta]$ функция.

$(\vee\vee) = dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ominus$

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$dx = (r\cos\varphi)'_\varphi\, d\varphi = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\, d\varphi$

$dy = (r\sin\varphi)'_\varphi\, d\varphi = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\, d\varphi$

$$\begin{aligned}
(dx)^2 + (dy)^2 &= \left[(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2\right] (d\varphi)^2 = \\
&= \begin{bmatrix} (r')^2\cos^2\varphi - \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\sin^2\varphi + \\ + (r')^2\sin^2\varphi + \cancel{2r'r\cos\varphi\sin\varphi} + r^2\cos^2\varphi \end{bmatrix} (d\varphi)^2 = \\
&= \left[(r')^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right] (d\varphi)^2 = \left[(r')^2 + r^2\right] (d\varphi)^2
\end{aligned}$$

$\ominus \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi = dl$

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi} \tag{7}$$

13 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод «$u \cdot v$») и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной)

Линейные ДУ 1-го порядка

Определение 6. **Дифференциальным уравнением 1-го порядка** называется уравнение, которое зависит от одной независимой переменной x, неизвестной функции $y(x)$ и её производной:

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x)\right)$$

F — известная функция 3-х переменных

Определение 7. ДУ 1-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция $y(x)$ и её производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = f(x)}$$

$p(x),\ f(x)$ — непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$

Метод Бернулли (метод подстановки)

Рассмотрим ЛНДУ:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)$$

$p(x),\ f(x)$ — непрерывные функции $I \subset \mathbb{R}$.

Метод подстановки: $\boxed{y(x) = u(x) \cdot v(x)}$

Подставим $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ в ЛНДУ:

$$\begin{aligned} u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + p(x) \cdot u(x) \cdot v(x) &= f(x) \\ v(x)\Big(u'(x) + p(x) \cdot u(x)\Big) + u(x) \cdot v'(x) &= f(x) \\ v(x)\Bigg(\underbrace{u'(x) + p(x) \cdot u(x)}_{0}\Bigg) &= f(x) - u(x) \cdot v'(x) \end{aligned}$$

Так как одну неизвестную переменную $y(x)$ заменили на две функции $u(x)$ и $v(x)$, то одну из этих двух функций можно выбрать так, как удобно. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй неизвестной функции.

$$\begin{aligned} u'(x) + p(x) \cdot u(x) = 0 \ &\text{— ДУ с разделяющимися переменными} \\ u' &= -p(x) \cdot u \\ \frac{du}{dx} &= -p(x) \cdot u \quad \Big|\ \cdot dx \Big| \quad : u \neq 0 \\ \frac{du}{u} &= -p(x)\, dx \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u} &= -\int p(x)\,dx \\
\ln|u| &= -\int p(x)\,dx + C, \quad \forall C - const \\
e^{\ln|u|} &= e^{-\int p(x)dx + C}, \quad \forall C - const \\
|u| &= C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad \forall C_1 = e^C > 0 \\
u &= C_2 \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad C_2 = \pm C_1 \quad C_2 \neq 0
\end{aligned}$$

$C_2 = 1$ для удобства вычислений

$$u = e^{-\int p(x)dx}$$

$C_2 \neq 0$, так как $u(x) = 0,\ y(x) = 0$, а $y(x) = 0$ не является решением ЛНДУ. Конкретизировать данное решение можно, так имеется произвольный выбор по одной из переменных. Произвольная постоянная будет учтена при нахождении второй неизвестной функции.

$$v(x)\Big(\underbrace{u'(x) + p(x)\cdot u(x)}_{0}\Big) = f(x) - u(x)\cdot v'(x)$$

$$\boxed{f(x) - u(x)v'(x) = 0} \qquad u(x) = e^{-\int p(x)dx}$$

$$\begin{aligned}
f(x) - v'\cdot e^{-\int p(x)dx} &= 0 \text{ — ДУ с разделяющимися переменными} \\
v'\cdot e^{-\int p(x)dx} &= f(x) \\
v' &= f(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \\
\frac{dv}{dx} &= f(x)\cdot e^{\int p(x)dx} \\
dv &= f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx
\end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned}
\int dv &= \int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx \\
v &= \int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k, \quad \forall k - const
\end{aligned}$$

Подставим $u(x)$ и $v(x)$ в подстановку $y(x) = u(x)\cdot v(x)$:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k\right), \quad \forall k - const$$

Общее решение ЛНДУ:

$$y_{\text{он}}(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k\right), \quad \forall k - const$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Рассмотрим ЛНДУ 1-го порядка:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \text{ — ЛНДУ}$$

$p(x),\ f(x)$ — непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$

$\boxed{\text{1 этап}}$ Решение соответствующего ЛОДУ

$$\begin{aligned} y' + p(x) \cdot y &= 0 \quad \text{ЛОДУ} \\ y' &= -p(x) \cdot y \quad \text{ДУ с разделяющимися переменными} \\ \frac{dy}{dx} &= -p(x) \cdot y \quad \Big| \cdot dx \Big| \ : y \neq 0 \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)\, dx \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= -\int p(x)\, dx \\ \ln|y| &= -\int p(x)\, dx + C, \quad \forall C \text{ — } const \\ e^{\ln|y|} &= e^{-\int p(x) dx + C}, \quad \forall C \text{ — } const \\ e^{\ln|y|} &= e^{-\int p(x) dx} \cdot e^{C}, \quad \forall C \text{ — } const \\ |y| &= C_1 \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad \forall C_1 = e^C > 0 \\ y &= C_2 \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad C_2 = \pm C_1,\ C_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Особые решения: $y = 0$

$$\begin{aligned} (0)' + p(x) \cdot 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$y = 0$ — особое решение

$$\begin{cases} y = C_2 \cdot e^{-\int p(x) dx} \\ y = 0 \end{cases} \quad C_2 \neq 0$$

$$y = k \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad \forall k \text{ — } const$$

Общее решение ЛОДУ:

$$y_{\text{оо}} = k \cdot e^{-\int p(x) dx}, \quad \forall k \text{ — } const$$

$\boxed{\text{2 этап}}$ Предполагаемый вид решения ЛНДУ

$$y_{\text{он}} = k(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Представим предполагаемый вид решения ЛНДУ $y_{\text{он}}$ в ЛНДУ:

$$\begin{aligned} \Big(k(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}\Big)' + p(x) \cdot k(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} &= f(x) \\ k'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} + \cancel{k(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot \big(-p(x)\big)} + \cancel{p(x) \cdot k(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}} &= f(x) \\ k'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} &= f(x) \text{ — ДУ с разд. перем.} \\ k'(x) &= f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \\ \frac{dk}{dx} &= f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \\ dk &= f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}\, dx \end{aligned}$$

Интегрируем:

$$k(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\,dx + k, \quad k - const$$

Подставляем $k(x)$ в предполагаемое решение ЛНДУ:

$$y_{\text{он}} = k(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + k\right), \ \forall k - const$$

14 Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка

Определение 8. **ДУ n-го порядка** называется уравнение вида:

$$\boxed{F\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0} \tag{1}$$

F — известная функция от $n+2$ переменных

Определение 9. ДУ n-го порядка, **разрешённым относительно старшей производной**, называется уравнение вида:

$$y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

Определение 10. **Задача Коши** для ДУ n-го порядка заключается в отыскании решения ДУ (2), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \tag{3}$$

Задача Коши = ДУ (2) + начальное условие (3)

Теорема 24 *(О существовании и единственности решения ЗК для ДУ n-го порядка)*. Если функция $f\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right)$ и её частные производные по переменным $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$, то есть функции $f'_y\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right)$, $f'_{y'}\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right)$, $\ldots,\ f'_{y^{(n-1)}}\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right)$, непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, содержащей точку $M_0(x_0, y_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n\cdot 10})$, то существует и при том единственное решение ЗК (2), (3).

ДУ, допускающие понижение порядка

1 тип

Уравнения вида

$$\boxed{y^{(n)} = f(x)}$$

Метод решения: n-кратное интегрирование

Пример.

$$\begin{aligned}
y'' &= \sin x \\
y' &= \int \sin dx = -\cos x + C_1, \quad \forall C_1 - const \\
y &= -\int \cos dx + C_1 \int dx + C_2, \quad \forall C_2 - const \\
y &= -\sin x + C_1 x + C_2, \quad \forall C_1, C_2 - const
\end{aligned}$$

2 тип

Уравнения, которые не содержат переменную x, то есть

$$\boxed{F\left(y,\, y',\, \dots,\, y^{(n)}\right) = 0}$$

Замена:

$$\begin{aligned}
y' &= p(y) \\
y'' &= p' \cdot y' = p' \cdot p \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Для ДУ 2-го порядка: $\boxed{F(y,\, y',\, y'') = 0}$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = p' \cdot p \end{cases} \tag{$*$}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(y,\, p,\, p' \cdot p) = 0}$$

Замена $(*)$ позволяет понизить порядок ДУ на единицу.

$\boxed{\text{1 шаг}}$ Решаем ДУ $F(y,\, p,\, p' \cdot p) = 0$. Интегрируем. Находим функцию $p = \Psi(y,\, C_1)$, $C_1 - const$.

$\boxed{\text{2 шаг}}$ Обратная замена $p = y'$

$\boxed{\text{3 шаг}}$ $y' = \Psi(y, C_1), \forall C_1 - const$

Решаем ДУ 1-го порядка. Интегрируем:

$$y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2)$$

3 тип

Уравнения, в которых в явном виде отсутствует y, то есть

$$\boxed{F\left(x,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0}$$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} \qquad (*)$$

С помощью $(*)$ понижаем порядок ДУ на единицу.
Для ДУ 2-го порядка:

$$F(x,\, y',\, y'') = 0$$

Замена:

$$\begin{cases} y' = p(x) \\ y'' = p' \end{cases} \qquad (*)$$

$$F(x,\, p,\, p') = 0$$

$\boxed{\text{1 шаг}}$ Решаем ДУ 1-го порядка $F(x,\, p,\, p') = 0$. Интегрируем. Находим функцию $p = \Psi(x, C_1),\ \forall C_1 - const$

$\boxed{\text{2 шаг}}$ Обратная замена $p = y'$

$\boxed{\text{3 шаг}}$ $y' = \Psi(x, C_1)$ — ДУ 1-го порядка. Решаем ДУ 1-го порядка. Интегрируем. Находим $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2),\ \forall C_1, C_2 - const$

15 Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Линейные ДУ высшего порядка

Определение 11. ДУ n-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция $y(x)$ и её производные до n-го порядка включительно входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)} \tag{1}$$

$p_1(x), \ \ldots, \ p_n(x)$ — функции, заданные на некотором промежутке I.
$p_1(x), \ \ldots, \ p_n(x)$ — коэффициенты
$f(x)$ — функция, определена на промежутке I
$f(x)$ — свободный член

Определение 12.
Если $f(x) = 0, \ \forall x \in I$, то ДУ (1) называется **линейным однородным ДУ** (ЛОДУ).

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0} \tag{2}$$

(2) ЛОДУ n-го порядка

Если $f(x) \neq 0$ хотя бы для одного $x \in I$, то ДУ (1) называется **линейным неоднородным ДУ** n-го порядка (ЛНДУ).

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)} \tag{1}$$

(1) ЛНДУ n-го порядка

Определение 13. **Задача Коши** для линейного дифференциального уравнения n-го порядка заключается в отыскании решения ДУ (1), удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \tag{3}$$

Задача Коши = ДУ (1) + начальное условие (3)

Теорема 25 *(О существовании и единственности решения ЗК (1), (3))*.
Если в ЛНДУ (1) функции $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на некотором промежутке I, то задача Коши для ЛНДУ (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (3).

Свойства частных решений ЛОДУ n-го порядка

Теорема 26.
Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными функциями $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ на промежутке I образует линейное пространство.

Доказательство.
Пусть y_1 и y_2 — частные решения ЛОДУ n-го порядка (2). Тогда:

$$+\begin{array}{l} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 \end{array}$$

Складываем уравнения:

$$\left(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}\right) + p_1(x)\left(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}\right) + \ldots + p_{n-1}(x)\left(y_1' + y_2'\right) + p_n(x)\left(y_1 + y_2\right) = 0$$

По свойству производной:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) = 0$$

Обозначим $y = y_1 + y_2$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$y = y_1 + y_2$ — частное решение ЛОДУ (2).
Пусть y_1 — частное решение ЛОДУ n-го порядка (2) Тогда:

$$y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \quad \Big| \cdot C = const, \ C \neq 0$$

$$C \cdot y_1^{(n)} + C \cdot p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C \cdot p_{n-1}(x)y_1' + C \cdot p_n(x)y_1 = 0$$

$$(Cy_1)^{(n)} + p_1(x)(Cy_1)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)(Cy_1)' + p_n(x)(Cy_1) = 0$$

Обозначим $y = Cy_1, \quad C$ — $const, \ C \neq 0$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = C \cdot y_1, \text{ где } C \text{ — } const, \ C \neq 0 \quad \text{— решение ЛОДУ (2)}$$

По определению линейного пространства $\Rightarrow$ частные решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство. ■

Теорема 27.
Если $y_1,\ \ldots,\ y_n$ — частные решения ЛОДУ (2), то их линейная комбинация, то есть $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, где $C_1,\ \ldots,\ C_n$ — *const*, является решением ЛОДУ (2).

Доказательство.
Пусть $y_1,\ \ldots,\ y_n$ — частные решения ЛОДУ (2).

$$+\left|\begin{array}{ll} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 & \Big|\cdot C_1 \\ y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 & \Big|\cdot C_2 \\ \dotfill & \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = 0 & \Big|\cdot C_n \end{array}\right.$$

Умножим каждое уравнение на константу $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$, где $C_i \neq 0,\ i = \overline{1, n}$.

$$\begin{aligned} \left(C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)}\right) &+ p_1(x)\left(C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}\right) + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'\right) + \\ &+ p_n(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right) = 0 \end{aligned}$$

По свойству производной:

$$\begin{aligned} (C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n)^{(n)} &+ p_1(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right)^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right)' + \\ &+ p_n(x)\left(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n\right) = 0 \end{aligned}$$

Обозначим $y' = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \text{ — решение ЛОДУ n-го порядка}$$

■

16 Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций

Определение 14. Система функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на некотором промежутке I, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n = 0$$

при этом существует хотя бы один $C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n},\ C_1,\ \ldots,\ C_n$ — $const$

Определение 15. Система функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется **линейно независимой** на некотором промежутке I, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n = 0$$

где все $C_i = 0,\ i = \overline{1,n}$

16.1 Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций

Теорема 28 *(О вронскиане линейно зависимых функций)***.**
Если $(n-1)$ раз дифференцируемые функции $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на некотором промежутке I, то

$$W(x) = 0,\ \forall x \in I$$

Доказательство.
Так как $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на I, то

$$\boxed{C_1y_1(x),\ \ldots,\ C_ny_n(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \qquad (*)$$

Продифференцируем $(*)$ $(n-1)$ раз:

$$\boxed{C_1y_1'(x),\ \ldots,\ C_ny_n'(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \qquad (**)$$

По определению линейной зависимости (**опр.14**) $\Rightarrow y_1'(x),\ \ldots,\ y_n'(x)$ — линейно зависимы

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{C_1y_1^{(n-1)}(x),\ \ldots,\ C_ny_n^{(n-1)}(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \qquad (***)$$

По определению линейной зависимости $\Rightarrow y_1^{(n-1)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x)$ — линейно зависимы
Составим систему из $(*)$, $(**)$ и $(***)$:

$$\begin{cases} C_1y_1(x),\ \ldots,\ C_ny_n(x) = 0 \\ C_1y_1'(x),\ \ldots,\ C_ny_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x),\ \ldots,\ C_ny_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ относительно $C_1, \ldots, C_n$.
Определитель этой СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \text{ — это определитель Вронского}$$

$W(x) = 0$, так как все строки определителя линейно зависимы. ■

Утверждение 1.
Если существует хотя бы одна точка $x_0 \in I$, $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независима.

16.2 Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Теорема 29 *(О вронскиане линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка)*.
Если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы на некотором промежутке I и являются частными решениями ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке I коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, то

$$W(x) \neq 0, \ \forall x \in I$$

Доказательство (Метод от противного).
Предположим, что $\exists x_0 \in I \colon W(x_0) \neq 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Построим СЛАУ по определителю

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Данная СЛАУ имеет ненулевое решение, так как $W(x_0) = 0$
Рассмотрим функцию

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

Так как $y_1,\ \dots,\ y_n$ — частные решения ЛОДУ n-го порядка, то по **Т.27**:

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \text{ — решение ЛОДУ n-го порядка}$$

Найдём $y(x_0)$:

$$y(x_0) = C_1y_1(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = 0$$

Дифференцируем $(n-1)$ раз функцию $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$:

$$\begin{gathered}
y'(x_0) = C_1y_1'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = 0 \\
y''(x_0) = C_1y_1''(x_0) + \ldots + C_ny_n''(x_0) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n-1)}(x_0) = C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0
\end{gathered}$$

Получили, что $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ — решение ЛОДУ n-го порядка (2), удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Но $y = 0$ – решение ЛОДУ (2), удовлетворяющее начальному условию (3)
По теореме $\exists!$ *решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка* (**Т.25**) $\Rightarrow$

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n = 0$$

при этом $C_1,\ \ldots,\ C_n$ – ненулевые константы $\Rightarrow$ $y_1,\ \ldots,\ y_n$ — линейно зависимы по определению линейной зависимости (**опр.14**). Это противоречит условию $\Rightarrow$ предположение не является верным $\forall x \in I\colon W(x) \neq 0$ ■

17 Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Пусть дано ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

Определение 16. Фундаментальной системой решений ЛОДУ n-го порядка (1) называется любая система линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка.

Утверждение 2.
Если имеем ФСР на промежутке, то $W(x) \neq 0$ на этом промежутке.

$$\text{ФСР} \to \text{лин. нез.} \to W(x) \neq 0$$

Теорема 30 *(О существовании ФСР ЛОДУ n-го порядка).*
Любое ЛОДУ n-го порядка (1) с непрерывными на промежутке I коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ имеет ФСР, то есть систему из n линейно независимых функций.

Доказательство.
Рассмотрим ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — непрерывны на I.
Рассмотрим произвольный числовой определитель, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \gamma_{ij} \in \mathbb{R}, \ (ij) = \overline{1, n}$$

Возьмём $\forall x_0 \in I$ и сформулируем для ЛОДУ n-го порядка задачи Коши, причём начальное условие в точке x_0 для i-ой ЗК возьмём из i-го столбца определителя.
$\boxed{\text{1 ЗК}}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{11} \\ y'(x_0) = \gamma_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n1} \end{cases} \text{— начальное условие}$$

По теореме *о существовании и единственности решения* (**Т.24**) 1-ая задача Коши имеет единственное решение $y_1(x)$.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\boxed{\text{n ЗК}}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{1n} \\ y'(x_0) = \gamma_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{nn} \end{cases} \text{— начальное условие}$$

По теореме *о существовании и единственности решения* n-ая задача Коши имеет единственное решение $y_n(x)$.
Рассмотрим функции:

$$\begin{gathered} y_1 \text{ — решение 1-ой ЗК} \\ y_2 \text{ — решение 2-ой ЗК} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n \text{ — решение n-ой ЗК} \end{gathered}$$

Определитель Вронского функций $y_1, \ldots, y_n$:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(x_0) & \gamma_2(x_0) & \cdots & \gamma_n(x_0) \\ \gamma_2'(x_0) & \gamma_2'(x_0) & \cdots & \gamma_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1^{(n-1)}(x_0) & \gamma_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \gamma_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

По утверждению 1 (**с.38**): $\exists x_0 \in I\colon W(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; y_1, \ldots, y_n$ — линейно независимы $\Rightarrow y_1, \ldots, y_n$ образуют ФСР. ■

18 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

Теорема 31 *(О структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка)***.**
Общим решением ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ на промежутке I является линейная комбинация частных решений, входящих в ФСР.

$$y_{\text{оо}} = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \tag{2}$$

«оо» — общее решение однородного уравнения

$$y_1, \ldots, y_n \text{ — ФСР ЛОДУ (1)}, \quad C_1, \ldots, C_n \text{ — } const$$

Доказательство.
1) Покажем, что (2) решение ЛОДУ (1), но не общее. Для этого подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n)^{(n)} &+ p_1(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right)^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right)' + \\ &+ p_n(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right) = 0\end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned}C_1y_1^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} &+ p_1(x)C_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)C_ny_n^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)C_1y_1' + \ldots + p_{n-1}(x)C_ny_n' + \\ &+ p_n(x)C_1y_1 + \ldots + p_n(x)C_ny_n = 0\end{aligned}$$

Группируем:

$$
\begin{aligned}
&C_1 \overbrace{\left(y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\right)}^{0} + \\
&+ \ldots + \\
&+C_n \underbrace{\left(y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n\right)}_{0} = 0
\end{aligned}
$$

Так как $y_1, \ldots, y_n$ — частные решения ЛОДУ (1), то:

$$
\begin{aligned}
C_1 \cdot 0 + \ldots + C_n \cdot 0 = 0& \\
0 = 0 \;\Rightarrow\; (2) &\text{ — решение } (1)
\end{aligned}
$$

2) Покажем, что (2) — это общее решение (1), то есть из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$
\begin{cases}
y(x_0) = y_0 \\
y'(x_0) = y_{10} \\
y''(x_0) = y_{20} & x_0 \in I \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n-1)}(x_0) = y_{n \cdot 10}
\end{cases}
\tag{3}
$$

Подставим (2) в (3):

$$
\begin{cases}
y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\
y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_{10} \\
y''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \ldots + C_n y_n''(x_0) = y_{20} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n \cdot 10}
\end{cases}
\quad \text{— СЛАУ}
$$

СЛАУ относительно $C_1, \ldots, C_n$. Определитель этой системы — это определитель Вронского.

$$
W(x_0) = \begin{vmatrix}
y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\
y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0)
\end{vmatrix}
$$

так как $y_1, \ldots, y_n$ ФСР $\Rightarrow$ $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы $\Rightarrow$ $W(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ ранг расширенной матрицы СЛАУ совпадает с рангом основной матрицы $\Rightarrow$ число неизвестных совпадает с числом уравнений $\Rightarrow$ СЛАУ имеет единственное решение:

$$
C_1^0, \ldots, C_n^0
$$

В силу теоремы *о существовании и единственности решения задачи Коши* (**Т.24**):

$$
y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n \text{ — единственное решение ЗК (1), (3)}
$$

То есть получилось из (2) выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию (3) $\Rightarrow$ по определению общего решения (**опр.31**) (2) — общее решение ЛОДУ (2). ■

19 Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{1}$$

Пусть y_1 и y_2 — два частных решения ЛОДУ (1). Для y_1 и y_2 верны равенства:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-y_2) \\ \cdot\, y_1 \end{array} \right. \text{«+»}$$

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) + p_2(x)(\cancel{y_1y_2 - y_1y_2}) = 0 \tag{2}$$

Введём обозначение:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

$$\Big(W(x)\Big)' = \Big(y_1y_2' - y_2y_1'\Big)' = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - y_1''y_2 - \cancel{y_1'y_2'} = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

(2) примет вид:

$$\begin{aligned}
W' + p_1(x)\cdot W &= 0 \text{ ДУ с разделяющимися переменными} \\
W' &= -p_1(x)\cdot W \\
\frac{dW}{dx} &= -p_1(x)\cdot W \quad \Big| : W \neq 0 \quad \Big| \cdot dx \\
\frac{dW}{W} &= -p_1(x)\,dx \\
\ln|W| &= -\int p_1(x)\,dx + C,\ \forall C - const \\
e^{\ln|W|} &= e^{-\int p_1(x)dx}\cdot e^C \\
|W| &= e^{-\int p_1(x)dx}\cdot C_1,\ \forall C_1 = e^C > 0 \\
W &= C_2\cdot e^{-\int p_1(x)dx},\ \forall C_2 = \pm C_1 \neq 0
\end{aligned}$$

$W = 0$ — особое решение

$$\boxed{W = C_3\cdot e^{-\int p_1(x)dx},\ \forall C_3 - const}$$

Формула Остроградского-Лиувилля

Замечание. Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ n-го порядка имеет тот же вид, что и для ЛОДУ 2-го порядка, где $p_1(x)$ — коэффициент при $(n-1)$-ой производной при условии, что коэффициент при n-ой производной равен 1.

20 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении

Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{1}$$

y_1 — частное решение ЛОДУ (1) дано по условию.
y_2 — ? — второе частное решение ЛОДУ (1) линейно независимо с y_1

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' \neq 0$$

Рассмотрим:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} \xlongequal{\text{ф. О-Л}} \frac{1}{y_1^2} \cdot C_3 \cdot e^{-\int p_1(x)dx}$$
$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} \cdot C_3 \cdot e^{-\int p_1(x)dx}$$

Интегрируем:

$$\frac{y_2}{y_1} = C_3 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx + C_4$$
$$y_2 = y_1 \cdot \left(C_3 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx + C_4\right)$$

y_2 — частное решение $\quad C_4 = 0 \quad C_3 = 1$
Главное $C_3 \neq 0$, так как иначе y_1 и y_2 линейно зависимы.

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**Т.31**):

$$y_{\text{оо}} = C_1y_1 + C_2y_2$$
$$y_{\text{оо}} = C_1y_1 + C_2y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx$$

21 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad \text{ЛНДУ} \tag{1}$$

$p_1(x), \ldots, p_n(x), f(x)$ — функции на I

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad \text{ЛОДУ} \tag{2}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \quad \text{начальное условие} \tag{3}$$

Теорема 32 *(О структуре общего решения ЛНДУ).*
Общее решение ЛНДУ (1) с непрерывными на промежутке I функциями $p_1(x), \ldots, p_n(x), f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего ЛОДУ (2) и некоторого частного решения ЛНДУ (1).

$$\boxed{y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}} \tag{4}$$

- «оо» — общее решение однородного уравнения
- «чн» — частное решение неоднородного уравнения

Доказательство.
Сначала покажем, что (4) решение ЛНДУ (1), но не общее. Подставим (4) в (1):

$$\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)^{(n)} + p_1(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)' + p_n(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big) = f$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} y_{\text{оо}}^{(n)} + y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{оо}} + p_{n-1}(x)y'_{\text{чн}} + \\ + p_n(x)y_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{чн}} = f \end{aligned}$$

Группируем $y_{\text{оо}},\ y_{\text{чн}}:$

$$\begin{aligned} &\overbrace{y_{\text{оо}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{оо}}}^{0} + \\ + &\underbrace{y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{чн}} + p_n(x)y_{\text{чн}}}_{f} = f \end{aligned}$$

Так как $y_{\text{оо}}$ — общее решение ЛОДУ (2), $y_{\text{чн}}$ — частное решение ЛНДУ (1):

$$0 + f = f \;\Rightarrow\; f = f \;\Rightarrow\; (4) - \text{решение ЛНДУ (1)}$$

По теореме *о существовании и единственности решения задачи Коши* (**Т.25**) следует, что ЗК (1), (3) имеет единственное решение.

Покажем, что (4) — общее решение. (4) перепишется в виде:

$$y_{\text{он}} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + y_{\text{чн}} \tag{4.1}$$

$y_1, \dots, y_n$ — ФСР ЛОДУ (2) $\qquad C_1, \dots, C_n$ — *const*

Так как функции $p_1(x), \dots, p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на I, то по теореме *о существовании и единственности решения задачи Коши* $\Rightarrow$ $\exists$ единственное решение задачи Коши (1), (3).

Остаётся показать, что (4.1) и его производная удовлетворяют начальному условию (3), то есть из начального условия (3) единственным образом можно выделить константы $C_1^0, \dots C_n^0$, то есть можно выделить частное решение.
Для этого (4.1) дифференцируем $(n-1)$ раз и подставляем в (3):

$$\begin{cases} y_{\text{он}}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) + y_{\text{чн}}(x_0) = y_0 \\ y'_{\text{он}}(x_0) = C_1 y'_1(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) + y'_{\text{чн}}(x_0) = y_{10} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{\text{он}}^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) + y_{\text{чн}}^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{\text{чн}}(x_0) \\ C_1 y'_1(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) = y_{10} - y'_{\text{чн}}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} - y_{\text{чн}}^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \tag{5}$$

(5) — это СЛАУ относительно $C_1, \dots, C_n$.

Определитель СЛАУ (5) — это определитель Вронского:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \cdots & y'_n(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ т.к. } y_1, \dots, y_n \text{ ФСР ЛОДУ (2)}$$

Так как $W(x_0) \neq 0$, то ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы (число уравнений совпадает с числом неизвестных) $\Rightarrow$ СЛАУ (5) имеет единственное решение $C_1^0, \dots, C_n^0$.

Тогда функция $y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n + y_{\text{чн}}$ — является частным решением ЗК (1), (3), удовлетворяющим начальному условию (3) $\Rightarrow$ из решения (4.1) выделим частное решение $y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n + y_{\text{чн}}$ $\Rightarrow$ по определению общего решения (**опр.31**) (4.1) или (4) — общее решение ЛНДУ (1). ■

22 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad a_1, a_2 - const \qquad \text{ЛОДУ} \tag{1}$$

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \qquad \text{характеристическое уравнение}$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$D = 0 \Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет два действительных равных между собой корня / один корень кратности два.

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R} \\ y_1 = e^{kx} \end{aligned} \quad k = -\frac{a_1}{2}$$

Найдём y_2 — частное решение ЛОДУ (1) по известному частному решению y_1, причём y_1 и y_2 линейно независимы:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\, dx = \begin{vmatrix} p_1(x) = a_1 - const \\ y_1 = e^{kx},\ k \in \mathbb{R} \end{vmatrix} = e^{kx} \int \frac{1}{e^{2kx}} \cdot e^{-\int a_1 dx} =$$

$$= e^{-\frac{a_1}{2}x} \int \frac{1}{\cancel{e^{-a_1 x}}} \cdot \cancel{e^{-a_1 x}}\, dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} \int dx = e^{-\frac{a_1}{2}x} x$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{aligned}\right\} \text{два частных решения ЛОДУ (1)}$$

Покажем, что y_1 и y_2 линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a_1}{2}x} & xe^{-\frac{a_1}{2}x} \\ -\frac{a_1}{2}e^{-\frac{a_1}{2}x} & e^{-\frac{a_1}{2}x} - \frac{a_1}{2}xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{vmatrix} = e^{-a_1 x} - \cancel{\frac{a_1}{2}xe^{-a_1 x}} + \cancel{\frac{a_1}{2}xe^{-a_1 x}} =$$

$$= e^{-a_1 x} \neq 0,\ \forall x \in I \ \Rightarrow\ y_1, y_2 \text{ лин. нез.} \ \Rightarrow\ \text{образуют ФСР}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{cases}$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**Т.31**):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a_1}{2}x}$$

23 Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad a_1, a_2 - const \qquad \text{ЛОДУ} \tag{1}$$

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \qquad \text{характеристическое уравнение}$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$D < 0 \ \Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет комплексные корни.

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i \qquad i - \text{мнимая единица, } \sqrt{-1} = i$$

α — действительная часть $\qquad \beta$ — мнимая часть
Формула Эйлера:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{cases}$$

По корням характеристического уравнения находим частные решения ЛОДУ (1).
$k_1 = \alpha + \beta i$:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)}$$

$k_2 = \alpha - \beta i$:

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)}$$

Найдём действительные решения ЛОДУ (1). Составим линейные комбинации:

$$\widetilde{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\widetilde{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Из свойств частных решений ЛОДУ следует (**c.35**), что $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ — тоже решения ЛОДУ (как линейная комбинация).
Покажем, что $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \widetilde{y_1} & \widetilde{y_2} \\ \widetilde{y_1}' & \widetilde{y_2}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{\alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x}\sin\beta x + \beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x - \cancel{\alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x}\sin\beta x + \beta e^{2\alpha x}\sin^2\beta x =$$

$$= e^{2\alpha x}\beta \cdot 1 \neq 0 \qquad \text{т.к } e^{2\alpha x} \neq 0 \ \forall x \in I$$

$\beta \neq 0$, так как если $\beta = 0$, то $k_1 = k_2 = \alpha$ — действительные корни

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \widetilde{y_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \widetilde{y_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}\right\} \text{ линейно независимы } \Rightarrow \text{ ФСР}$$

По теореме *о структуре решений ЛОДУ* (**T.31**):

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

24 Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad \text{ЛНДУ} \tag{1}$$

$p_1(x)$, …, $p_n(x)$, $f(x)$ — функции на I

Теорема 33 *(О суперпозиции (наложении) решений ЛНДУ n-го порядка)*.
Если

$$\begin{gathered} y_1 \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{gathered}$$

то линейная комбинация

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$$

является решением ЛНДУ (1) с правой частью

$$f = C_1f_1 + \ldots + C_nf_n$$

Доказательство.
Так как

$$\begin{gathered} y_1 \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{gathered}$$

то верны равенства

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = f_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = f_n \end{cases} \tag{$*$}$$

Рассмотрим

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \tag{$\vee$}$$

Подставим ($\vee$) в левую часть (1):

$$\begin{multline} \big(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\big)^{(n)} + p_1(x)\big(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\big)^{(n-1)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)\big(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\big)' + p_n(x)\big(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\big) \end{multline}$$

Вычислим производные:

$$\begin{multline} C_1y_1^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + p_1(x)C_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)C_ny_n^{(n-1)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)C_1y_1' + \ldots + p_{n-1}(x)C_ny_n' + p_n(x)C_1y_1 + \ldots + p_n(x)C_ny_n \end{multline}$$

Группируем y_1/y_n:

$$C_1 \overbrace{\left(y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\right)}^{f_1} + \ldots +$$
$$+ C_n \underbrace{\left(y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n\right)}_{f_n} \overset{(*)}{=\!=} C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n$$

■

Частное решение ЛНДУ

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f \quad \text{ЛНДУ} \tag{1}$$

$a_1 \ldots, a_n$ — $const$

Соответствующее ЛОДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \quad \text{ЛОДУ}$$

$a_1 \ldots, a_n$ — $const$

Характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

$k_1 \ldots, k_n$ — корни характеристического уравнения

ФСР ЛОДУ: $\left\{e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_n x}\right\}$

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

где $C_1 \ldots, C_n$ — $const$

Если правая часть ЛНДУ (1) представима специальным видом, то есть *квазиполиномом*, то по её виду можно найти некоторое частное решение ЛНДУ (1).

Суть метода: по виду функции f записывается предполагаемый вид частного решения ЛНДУ с неопределёнными коэффициентами. Затем это предполагаемое решение подставляем в ЛНДУ (1) и из полученного равенства находим неопределённые коэффициенты.

Продолжение на следующей странице

$$
\begin{array}{ccc}
 & f(x) & \\
\swarrow & & \searrow \\
\boxed{e^{\alpha x}P_n(x)} & & \boxed{e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)}
\end{array}
$$

$\alpha \in \mathbb{R},\ P_n(x)$ — многочлен степени n с определёнными коэффициентами

$$\downarrow$$

$$\boxed{y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\cdot Q_n(x)\cdot x^r}$$

$\alpha \in \mathbb{R},\ Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределёнными коэффициентами. r — кратность (сколько раз α является действительным корнем характеристического уравнения)

$$
\begin{aligned}
&\alpha = k_1 \ \Rightarrow\ r = 1\\
&\alpha = k_1 = k_2 \ \Rightarrow\ r = 2\\
&\alpha \neq k_i,\ i = \overline{1,n} \ \Rightarrow\ r = 0
\end{aligned}
$$

$\alpha,\, \beta \in \mathbb{R},\ P_n(x),\ Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно с определёнными коэффициентами

$$\downarrow$$

$$\boxed{y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\cdot\big(M_s(x)\cos\beta(x) + N_s(x)\sin\beta x\big)\cdot x^r}$$

$\alpha,\, \beta \in \mathbb{R},\ M_s(x),\ N_s(x)$ — многочлены степени s с неопределёнными коэффициентами, $s = \max\{n, m\}$ r — кратность (сколько раз $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения)

$$
\begin{aligned}
&\alpha \pm \beta i = k_{1,2} \ \Rightarrow\ r = 1\\
&\alpha \pm \beta i = k_{1,2} = k_{3,4} \ \Rightarrow\ r = 2\\
&\alpha \pm \beta i \neq k_i,\ i = \overline{1,n} \ \Rightarrow\ r = 0
\end{aligned}
$$

25 Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных

Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{1}$$

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad \text{ЛОДУ} \tag{2}$$

$p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ — функции.
Пусть y_1 и y_2 — это ФСР ЛОДУ (2). Тогда по теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**Т.31**):

$$y_{\text{оо}} = \underbrace{C_1y_1 + C_2y_2}_{\text{ФСР ЛОДУ}} \qquad C_1,\, C_2 - \forall const$$

<u>Метод Лагранжа</u>: предполагаемый вид решения ЛНДУ (1):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{3}$$

$C_1(x),\, C_2(x)$ — некоторые функции.
Вычислим:

$$y'_{\text{он}} = C'_1y_1 + C_1y'_1 + C'_2y_2 + C_2y'_2 = \underbrace{C'_1y_1 + C'_2y_2}_{0} + C_1y'_1 + C_2y'_2$$

Первое дополнительное условие Лагранжа:

$$\boxed{C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0}$$

$$y_{\text{он}}' = C_1y_1' + C_2y_2'$$
$$y_{\text{он}}'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''$$

$y_{\text{он}}$, $y_{\text{он}}'$, $y_{\text{он}}''$ в (1):

$$C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + p_1(x)\cdot\big(C_1y_1' + C_2y_2'\big) + p_2(x)\big(C_1y_1 + C_2y_2\big) = f$$

Группируем:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1\underbrace{\left(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\right)}_{0} + C_2\underbrace{\left(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\right)}_{0} = f$$

Так как y_1, y_2 — решения ЛОДУ (2), то
Второе условие Лагранжа:

$$\boxed{C_1'y_1' + C_2'y_2' = f}$$

Предполагаемое решение (3) будет являться решением ЛНДУ (1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f \end{cases} \text{ — \textbf{система варьируемых переменных}}$$

Определяем из системы варьируемых переменных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

$$C_1'(x) = \varphi(x) \qquad C_2'(x) = \Psi(x)$$

Интегрируем:

$$C_1(x) = \int \varphi(x)\,dx + k_1, \quad \forall k_1 \text{ — } const$$
$$C_2(x) = \int \Psi(x)\,dx + k_2, \quad \forall k_2 \text{ — } const$$

Подставляем $C_1(x),\ C_2(x)$ в (3):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \left(\int \varphi(x)\,dx + k_1\right)y_1 + \left(\int \Psi(x)\,dx + k_2\right)y_2 =$$
$$= \underbrace{k_1y_1 + k_2y_2}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{y_1\int \varphi(x)\,dx + y_2\int \Psi(x)\,dx}_{y_{\text{чн}}}$$

Система варьируемых переменных имеет единственное решение, так как определитель — это определитель Вронского.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{т.к. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ ФСР ЛОДУ}$$

26 Дополнительные определения

26.1 Неопределённый интеграл

Определение 17. Множество первообразных функции $f(x)$ на $(a;b)$ называется **неопределённым интегралом**.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C} \tag{4}$$

$\int$ — знак интеграла
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
x — переменная
$F(x) + C$ — множество первообразных
C — произвольная константа

Определение 18. **Интегрирование** — нахождение неопределённого интеграла.

26.2 Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение 19. **Дробно-рациональной функцией** или рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$
$$a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0 \text{ — } const$$

где $P_m(x),\ Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно.

Определение 20. Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$.

Определение 21. Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень числителя не меньше степени знаменателя, то есть $m \geqslant n$.

26.2.1 Простейшие рациональные дроби

$$1.\ \frac{A}{x-a} \qquad 2.\ \frac{A}{(x-a)^k} \qquad 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где $A,\ a,\ M,\ N,\ p,\ q$ — $const$, $K \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2$
$x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

26.3 Определённый интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b]$.

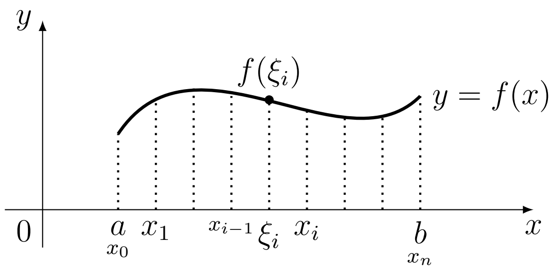
Определение 22. Множество точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$ называется **разбиением отрезка $[a; b]$**, при этом отрезки $[x_{i-1}; x_i]$ называются **отрезками разбиения**.

$i = 1, \ldots, n \quad i = \overline{1, n}$
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина i-го отрезка разбиения $\quad i = \overline{1, n}$
$\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$ — диаметр разбиения

Рассмотрим произвольное разбиение $[a; b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем точку ξ_i, $i = \overline{1, n}$. Составим сумму

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i} \tag{5}$$

(5) — интегральная сумма для функции $y = f(x)$ на $[a; b]$.



Определение 23. **Определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется конечный предел интегральной суммы (5), когда число отрезков разбиения растёт, а их длины стремятся к нулю.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i} \tag{6}$$

Предел (6) не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек ξ_i, $\overline{1, n}$.
$f(x)$ — подынтегральная функция
$f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение
$\int_a^b$ — знак определённого интеграла
a — нижний предел интегрирования
b — верхний предел интегрирования

Определение 24. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a; b]$, если существует конечный предел интегральной суммы (5) на $[a; b]$.

26.4 Криволинейная трапеция

Определение 25. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ на Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ параллельными оси Oy.

26.5 Абсолютная и условная сходимость

Определение 26. Если наряду с несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится и несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся абсолютно**.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится абсолютно}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } |f(x)| \text{ сходится}\end{array}}$$

Определение 27. Если несобственный интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $[a; +\infty)$ сходится, а несобственный интеграл от функции $|f(x)|$ по этому же промежутку расходится, то первый несобственный интеграл называется **сходящимся условно**.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится условно}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } f(x) \text{ сходится}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{несобственный интеграл}\\ \text{от } |f(x)| \text{ расходится}\end{array}}$$

26.6 Уравнение Бернулли

Определение 28. ДУ 1-го порядка называется **уравнением Бернулли**, если оно имеет вид:

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = y^m \cdot f(x)} \qquad m \neq 0,\ m \neq 1$$

$$m = 0 \ \Rightarrow \ \text{уравнение Бернулли} \ \longrightarrow \text{ЛНДУ}$$
$$m = 1 \ \Rightarrow \ \text{уравнение Бернулли} \ \longrightarrow \text{ЛОДУ}$$

$p(x),\ f(x)$ — непрерывны на $I \subset \mathbb{R}$

26.7 Общее и частное решения ДУ

Определение 29. **Общим решением** ДУ 2-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, удовлетворяющая условиям:

1. $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ — решение ДУ (2) при любых $C_1,\ C_2$ — $const$.
2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти такие $C_1^0,\ C_2^0$, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ будет удовлетворять начальному условию (3).

Определение 30. **Частным решением** ДУ 2-го порядка называется любая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, полученная из общего решения при конкретных значениях C_1^0 и C_2^0.

Определение 31. **Общим решением** ДУ n-го порядка называется функция $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \dots,\, C_n)$ удовлетворяющая условиям:

1. $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ — решение ДУ n-го порядка при любых $C_1, C_2, \dots, C_n$ — $const$.

2. Какого бы ни было начальное условие (3), можно найти такие $C_1^0,\, C_2^0,\, \dots,\, C_n^0$, что функция $y = \varphi(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \dots,\, C_n^0)$ будет удовлетворять начальным условиям (3).

Определение 32. **Частным решением** ДУ n-го порядка называется функция $y = \varphi(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \dots,\, C_n^0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \dots,\, C_n)$ при конкретных значениях $C_1^0,\, C_2^0,\, \dots,\, C_n^0$.

26.8 Определитель Вронского (вронскиан)

Определение 33. **Определителем Вронского** (вронскианом) системы $(n-1)$ раз дифференцируемых функций $y_1(x),\ \dots,\ y_n(x)$ называется определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

26.9 Характеристическое уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

$$\boxed{k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0} \tag{2}$$

Определение 34. Уравнение (2) называется характеристическим уравнением. **Характеристическое уравнение** — это алгебраическое уравнение/полином/многочлен, полученный из ДУ (1) путём замены n-ой производной неизвестной функции y на n-ую степень величины k, а сама функция y заменена на единицу.

27 Дополнительные теоремы

Теорема 34 *(Непрерывность $I(x)$)*.
Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ непрерывна, то $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — непрерывна на $[a;b]$.

Теорема 35 *(Существование определённого интеграла)*.
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она на этом отрезке интегрируема.

28 Дополнительные материалы

28.1 Таблица основных интегралов

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \forall C - const$	11. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$
2. $\displaystyle\int dx = x + C$	12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\| + C$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$	14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
5. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	15. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	16. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$	17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\| + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

28.2 Интегралы для сравнения. Эталоны, интегралы Дирихле

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha \leqslant 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 1 \end{cases}}$$

28.3 Таблица приложений определённого интеграла

Площадь фигуры	Объём тела	Длина дуги
$S = \int_a^b f(x)\,dx$	$V_T = \int_a^b S(x)\,dx$	$l = \int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$
$S = -\int_a^b f(x)\,dx$	$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2\,dx$	$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$
$S = \int_a^b \Big(f_1(x) - f_2(x)\Big)\,dx$	$V_{Ox} = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right)dx$	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi$
$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt$	$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2\,dy$	Площадь поверхности
$S = \dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi$	$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x\lvert y\rvert\,dx$	$Q_{Ox} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$
	$V_{Ox} = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,x'(t)\,dt$	$Q_{Oy} = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy$
	$V_{Oy} = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)y'(t)\,dt$	$Q_{Ox} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$
	$V_{Oy} = \pi \int_a^b x(t)y(t)x'(t)\,dt$	$Q_{Oy} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$
	$V_{Or} = \dfrac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\,d\varphi$	$Q_{Or} = 2\pi \int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi$

28.4 Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;	6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;	8. $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;	10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x,\ k > 0$ $(x \to 0)$;
11. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \sim a_nx^n$ $(x \to \infty)$	
12. $a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \sim a_1x$ $(x \to 0)$	

28.5 Таблица производных

1. $(c)' = 0;$

2. $(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u';$

4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u';$

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

7. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u';$

12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u';$

13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u';$

14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u';$

15. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u';$

16. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$