# Интегралы и дифференциальные уравнения

## Рубежный контроль

2 семестр | Модуль №2

GitHub: malyinik

2024 г.

# Содержание

# 1 Теоретические вопросы, оцениваемые в 1 балл

## 1.1 Сформулировать определение общего решения ОДУ n-го порядка

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \quad \text{— начальное условие}$$

**Определение.** **Общим решением** ДУ n-го порядка называется функция $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \dots,\, C_n)$ удовлетворяющая условиям:

1. $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \dots,\, C_n)$ — решение ДУ n-го порядка при любых $C_1, C_2, \dots, C_n$— $const$
2. Какого бы ни было начальное условие, можно найти точки $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$, что функция $y = \varphi(x,\, C_1^0,\, C_2^0,\, \dots,\, C_n^0)$ будет удовлетворять начальным условиям.

## 1.2 Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n-го порядка

**Определение.** **Задача Коши** для ДУ n-го порядка заключается в отыскании решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases}$$

Задача Коши = ДУ + начальное условие

## 1.3 Сформулировать определение линейного ОДУ n-го порядка

**Определение.** ДУ n-го порядка называется **линейным**, если неизвестная функция $y(x)$ и её производные до n-го порядка включительно входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)} \qquad (1)$$

Если $f(x) = 0$, $\forall x \in I$, то ДУ (1) называется **линейным однородным ДУ** (ЛОДУ).

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0} \qquad (2)$$

(2) ЛОДУ n-го порядка

## 1.4 Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы функций на промежутке

**Определение.** Система функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется **линейно зависимой** на некотором промежутке $I$, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n = 0$$

при этом существует хотя бы один $C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n},\ C_1,\ \ldots,\ C_n - const$

**Определение.** Система функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется **линейно независимой** на некотором промежутке $I$, если их линейная комбинация равна нулю, то есть

$$C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n = 0$$

где все $C_1 = 0,\ i = \overline{1,n}$

## 1.5 Сформулировать определение определителя Вронского системы функций

**Определение.** **Определителем Вронского** (вронскианом) системы $(n-1)$ раз дифференцируемых функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ называется определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

## 1.6 Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ

Пусть дано ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

**Определение.** **Фундаментальной системой решений ЛОДУ n-го порядка** (1) называется любая система <u>линейно независимых</u> частных решений ЛОДУ n-го порядка.

### 1.7 Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

$$\boxed{k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0} \tag{2}$$

**Определение 1.** Уравнение (2) называется характеристическим уравнением. **Характеристическое уравнение** — это алгебраическое уравнение/полином/многочлен, полученный из ДУ (1) путём замены n-ой производной неизвестной функции $y$ на n-ую степень величины $k$, а сама функция $y$ заменена на единицу.

## 2 Теоретические вопросы, оцениваемые в 3 балла

### 2.1 Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций

**Теорема** *(О вронскиане линейно зависимых функций)*.
Если $(n-1)$ раз дифференцируемые функции $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на некотором промежутке $I$, то

$$W(x) = 0,\ \forall x \in I$$

**Доказательство.**
Так как $y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на $I$, то

$$\boxed{C_1 y_1(x),\ \ldots,\ C_n y_n(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \tag{$*$}$$

Продифференцируем $(*)$ $(n-1)$ раз:

$$\boxed{C_1 y_1'(x),\ \ldots,\ C_n y_n'(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \tag{$**$}$$

По определению линейной зависимости $\Rightarrow y_1'(x),\ \ldots,\ y_n'(x)$ — линейно зависимы

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{C_1 y_1^{(n-1)}(x),\ \ldots,\ C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0} \qquad \exists C_i \neq 0,\ i = \overline{1,n} \tag{$***$}$$

По определению линейной зависимости $\Rightarrow y_1^{(n-1)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x)$ — линейно зависимы
Составим систему из $(*)$, $(**)$ и $(***)$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x), \ldots, C_n y_n(x) = 0 \\ C_1 y_1'(x), \ldots, C_n y_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x), \ldots, C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Это однородная СЛАУ относительно $C_1, \ldots, C_n$.

Определитель этой СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W(x) \text{ — это определитель Вронского}$$

$W(x) = 0$, так как все строки определителя линейно зависимы. ■

## 2.2 Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ДУ

**Теорема** *(О вронскиане линейно независимых частных решений ЛОДУ n-го порядка)*.
Если функции $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независимы на некотором промежутке $I$ и являются частными решениями ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

с непрерывными на промежутке $I$ коэффициентами $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, то

$$W(x) \neq 0,\ \forall x \in I$$

**Доказательство** (Метод от противного).
Предположим, что $\exists\, x_0 \in I \colon W(x_0) \neq 0$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

Построим СЛАУ по определителю

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = 0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Данная СЛАУ имеет ненулевое решение, так как $W(x_0) = 0$
Рассмотрим функцию

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$$

Так как $y_1$, ..., $y_n$ — частные решения ЛОДУ n-го порядка, то по теореме *о частных решениях ЛОДУ*:

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \text{ — решение ЛОДУ n-го порядка}$$

Найдём $y(x_0)$:

$$y(x_0) = C_1y_1(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = 0$$

Дифференцируем $(n-1)$ раз функцию $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$:

$$y'(x_0) = C_1y_1'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = 0$$
$$y''(x_0) = C_1y_1''(x_0) + \ldots + C_ny_n''(x_0) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Получили, что $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ — решение ЛОДУ n-го порядка (2), удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Но $y = 0$ – решение ЛОДУ (2), удовлетворяющее начальному условию (3)
По теореме $\exists!$ *решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка* $\Rightarrow$

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n = 0$$

при этом $C_1, \ldots, C_n$ – ненулевые константы $\Rightarrow$ $y_1, \ldots, y_n$ — линейно зависимы по определению линейной зависимости. Это противоречит условию $\Rightarrow$ предположение не является верным $\forall x \in I\colon W(x) \neq 0$ ■

## 2.3 Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного ДУ n-го порядка

**Утверждение.**
Если существует хотя бы одна точка $x_0 \in I$, $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независима.

Пусть дано ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

**Теорема** *(О существовании ФСР ЛОДУ n-го порядка)*.
Любое ЛОДУ n-го порядка (1) с непрерывными на промежутке $I$ коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ имеет ФСР, то есть систему из $n$ линейно независимых функций.

**Доказательство.**
Рассмотрим ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — непрерывны на $I$.

Рассмотрим произвольный числовой определитель, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \gamma_{ij} \in \mathbb{R},\ (ij) = \overline{1, n}$$

Возьмём $\forall x_0 \in I$ и сформулируем для ЛОДУ n-го порядка задачи Коши, причём начальное условие в точке $x_0$ для $i$-ой ЗК возьмём из $i$-го столбца определителя.

$\boxed{\text{1 ЗК}}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{11} \\ y'(x_0) = \gamma_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n1} \end{cases} \text{— начальное условие}$$

По теореме *о существовании и единственности решения* 1-ая задача Коши имеет единственное решение $y_1(x)$.

.........................................................

$\boxed{\text{n ЗК}}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \text{ — ДУ}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = \gamma_{1n} \\ y'(x_0) = \gamma_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{nn} \end{cases} \text{— начальное условие}$$

По теореме *о существовании и единственности решения* n-ая задача Коши имеет единственное решение $y_n(x)$.

Рассмотрим функции:

$$\begin{gathered} y_1 \text{ — решение 1-ой ЗК} \\ y_2 \text{ — решение 2-ой ЗК} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n \text{ — решение n-ой ЗК} \end{gathered}$$

Определитель Вронского функций $y_1, \ \ldots, \ y_n$:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(x_0) & \gamma_2(x_0) & \cdots & \gamma_n(x_0) \\ \gamma_2'(x_0) & \gamma_2'(x_0) & \cdots & \gamma_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1^{(n-1)}(x_0) & \gamma_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \gamma_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

По утверждению: $\exists x_0 \in I \colon W(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_1, \ldots, y_n$ — линейно независимы $\Rightarrow$ $y_1, \ldots, y_n$ образуют ФСР. ■

## 2.4 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ДУ n-го порядка

**Теорема** *(О структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка)*.
Общим решением ЛОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ на промежутке $I$ является линейная комбинация частных решений, входящих в ФСР.

$$y_{\text{оо}} = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \tag{2}$$

«оо» — общее решение однородного уравнения

$$y_1, \ldots, y_n \text{ — ФСР ЛОДУ (1)}, \quad C_1, \ldots, C_n \text{ — } const$$

**Доказательство.**
1) Покажем, что (2) решение ЛОДУ (1), но не общее. Для этого подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n)^{(n)} &+ p_1(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right)^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right)' + \\ &+ p_n(x)\left(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\right) = 0\end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned}C_1y_1^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} &+ p_1(x)C_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)C_ny_n^{(n-1)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ p_{n-1}(x)C_1y_1' + \ldots + p_{n-1}(x)C_ny_n' + \\ &+ p_n(x)C_1y_1 + \ldots + p_n(x)C_ny_n = 0\end{aligned}$$

Группируем:

$$\begin{aligned}&C_1\overbrace{\left(y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\right)}^{0} + \\ &+ \ldots + \\ &+ C_n\underbrace{\left(y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n\right)}_{0} = 0\end{aligned}$$

Так как $y_1, \ldots, y_n$ — частные решения ЛОДУ (1), то:

$$\begin{aligned}C_1 \cdot 0 + \ldots + C_n \cdot 0 = 0& \\ 0 = 0 \;\Rightarrow\; (2) \text{ — решение } (1)&\end{aligned}$$

2) Покажем, что (2) — это общее решение (1), то есть из него можно выделить един-

ственное частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = y_{20} \qquad x_0 \in I \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \tag{3}$$

Подставим (2) в (3):

$$\begin{cases} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_{10} \\ y''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \ldots + C_n y_n''(x_0) = y_{20} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases} \quad \text{— СЛАУ}$$

СЛАУ относительно $C_1, \ldots, C_n$. Определитель этой системы — это определитель Вронского.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

так как $y_1, \ldots, y_n$ ФСР $\Rightarrow$ $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы $\Rightarrow$ $W(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ ранг расширенной матрицы СЛАУ совпадает с рангом основной матрицы $\Rightarrow$ число неизвестных совпадает с числом уравнений $\Rightarrow$ СЛАУ имеет единственное решение:

$$C_1^0, \ldots, C_n^0$$

В силу теоремы *о существовании и единственности решения задачи Коши*:

$$y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n \text{ — единственное решение ЗК (1), (3)}$$

То есть получилось из (2) выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию (3) $\Rightarrow$ по определению общего решения (2) — общее решение ЛОДУ (2). ■

## 2.5 Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ДУ n-го порядка

**Теорема** *(О структуре общего решения ЛНДУ)*.
Общее решение ЛНДУ (1) с непрерывными на промежутке $I$ функциями $p_1(x), \dots, p_n(x)$, $f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего ЛОДУ (2) и некоторого частного решения ЛНДУ (1).

$$\boxed{y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}} \tag{2}$$

- «оо» — общее решение однородного уравнения
- «чн» — частное решение неоднородного уравнения

**Доказательство.**
Сначала покажем, что (4) решение ЛНДУ (1), но не общее. Подставим (4) в (1):

$$\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)^{(n)} + p_1(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big)' + p_n(x)\big(y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\big) = f$$

Вычислим производные:

$$y_{\text{оо}}^{(n)} + y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{оо}} + p_{n-1}(x)y'_{\text{чн}} + \\ + p_n(x)y_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{чн}} = f$$

Группируем $y_{\text{оо}}$, $y_{\text{чн}}$:

$$\overbrace{y_{\text{оо}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{оо}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{оо}} + p_n(x)y_{\text{оо}}}^{0} + \\ + \underbrace{y_{\text{чн}}^{(n)} + p_1(x)y_{\text{чн}}^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'_{\text{чн}} + p_n(x)y_{\text{чн}}}_{f} = f$$

Так как $y_{\text{оо}}$ — общее решение ЛОДУ (2), $y_{\text{чн}}$ — частное решение ЛНДУ (1):

$$0 + f = f \;\Rightarrow\; f = f \;\Rightarrow\; (4) \text{ — решение ЛНДУ } (1)$$

По теореме *о существовании и единственности решения задачи Коши* следует, что ЗК (1), (3) имеет единственное решение.

Покажем, что (4) — общее решение. (4) перепишется в виде:

$$y_{\text{он}} = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n + y_{\text{чн}} \tag{4.1}$$

$y_1, \dots, y_n$ — ФСР ЛОДУ (2) $\qquad C_1, \dots, C_n$ — $const$

Так как функции $p_1(x), \dots, p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на $I$, то по теореме *о существовании и единственности решения задачи Коши* $\Rightarrow$ $\exists$ единственное решение задачи Коши (1), (3).

Остаётся показать, что (4.1) и его производная удовлетворяют начальному условию (3), то есть из начального условия (3) единственным образом можно выделить константы $C_1^0, \dots C_n^0$, то есть можно выделить частное решение.

Для этого (4.1) дифференцируем $(n-1)$ раз и подставляем в (3):

$$\begin{cases} y_{\text{он}}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) + y_{\text{чн}}(x_0) = y_0 \\ y'_{\text{он}}(x_0) = C_1 y'_1(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) + y'_{\text{чн}}(x_0) = y_{10} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}_{\text{он}}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) + y^{(n-1)}_{\text{чн}}(x_0) = y_{n\cdot 10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{\text{чн}}(x_0) \\ C_1 y'_1(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) = y_{10} - y'_{\text{чн}}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n\cdot 10} - y^{(n-1)}_{\text{чн}}(x_0) \end{cases} \tag{5}$$

(5) — это СЛАУ относительно $C_1, \dots, C_n$.

Определитель СЛАУ (5) — это определитель Вронского:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \cdots & y'_n(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ т.к. } y_1, \dots, y_n \text{ ФСР ЛОДУ (2)}$$

Так как $W(x_0) \neq 0$, то ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы (число уравнений совпадает с числом неизвестных) $\Rightarrow$ СЛАУ (5) имеет единственное решение $C_1^0, \dots, C_n^0$.

Тогда функция $y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n + y_{\text{чн}}$ — является частным решением ЗК (1), (3), удовлетворяющим начальному условию (3) $\Rightarrow$ из решения (4.1) выделим частное решение $y = C_1^0 y_1 + \ldots + C_n^0 y_n + y_{\text{чн}} \Rightarrow$ по определению общего решения (**опр.??**) (4.1) или (4) — общее решение ЛНДУ (1). ■

## 2.6 Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ

**Теорема** *(О наложении (суперпозиции) частных решений ЛНДУ)***.**
Если

$$y_1 \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n$$

то линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$$

является решением ЛНДУ (1) с правой частью

$$f = C_1 f_1 + \ldots + C_n f_n$$

**Доказательство.**
Так как

$$\begin{gathered} y_1 \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n \text{ — решение ЛНДУ (1) с правой частью } f_n \end{gathered}$$

то верны равенства

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = f_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = f_n \end{cases} \tag{$*$}$$

Рассмотрим

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \tag{$\vee$}$$

Подставим ($\vee$) в левую часть (1):

$$\begin{multline} \big(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\big)^{(n)} + p_1(x)\big(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\big)^{(n-1)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)\big(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\big)' + p_n(x)\big(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n\big) \end{multline}$$

Вычислим производные:

$$\begin{multline} C_1y_1^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + p_1(x)C_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)C_ny_n^{(n-1)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)C_1y_1' + \ldots + p_{n-1}(x)C_ny_n' + p_n(x)C_1y_1 + \ldots + p_n(x)C_ny_n \end{multline}$$

Группируем $y_1/y_n$:

$$\begin{multline} C_1 \overbrace{\left(y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1\right)}^{f_1} + \ldots + \\ + C_n \underbrace{\left(y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n\right)}_{f_n} \overset{(*)}{=\!=} C_1f_1 + \ldots + C_nf_n \end{multline}$$

■

## 2.7 Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ДУ

**Теорема.**
Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка (2) с непрерывными функциями $p_1(x), \ \ldots, \ p_n(x)$ на промежутке $I$ образует линейное пространство.

**Доказательство.**
Пусть $y_1$ и $y_2$ — частные решения ЛОДУ n-го порядка (2). Тогда:

$$+\begin{array}{l} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0 \end{array}$$

Складываем уравнения:

$$\left(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}\right) + p_1(x)\left(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}\right) + \ldots + p_{n-1}(x)\left(y_1' + y_2'\right) + p_n(x)\left(y_1 + y_2\right) = 0$$

По свойству производной:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) = 0$$

Обозначим $y = y_1 + y_2$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$y = y_1 + y_2$ — частное решение ЛОДУ (2).
Пусть $y_1$ — частное решение ЛОДУ n-го порядка (2) Тогда:

$$y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0 \quad \Big| \cdot C = const, \ C \neq 0$$

$$C \cdot y_1^{(n)} + C \cdot p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C \cdot p_{n-1}(x)y_1' + C \cdot p_n(x)y_1 = 0$$

$$(Cy_1)^{(n)} + p_1(x)(Cy_1)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)(Cy_1)' + p_n(x)(Cy_1) = 0$$

Обозначим $y = Cy_1, \quad C - const, \ C \neq 0$:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = C \cdot y_1, \text{ где } C - const, \ C \neq 0 \quad \text{— решение ЛОДУ (2)}$$

По определению линейного пространства $\Rightarrow$ частные решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство. ■

**Теорема.**
Если $y_1, \ \ldots, \ y_n$ — частные решения ЛОДУ (2), то их линейная комбинация, то есть $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$, где $C_1, \ \ldots, \ C_n$ — *const*, является решением ЛОДУ (2).

**Доказательство.**
Пусть $y_1, \ \ldots, \ y_n$ — частные решения ЛОДУ (2).

$$+\left|\begin{array}{ll} y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y_1' + p_n(x) y_1 = 0 & \Big| \cdot C_1 \\ y_2^{(n)} + p_1(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y_2' + p_n(x) y_2 = 0 & \Big| \cdot C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ y_n^{(n)} + p_1(x) y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y_n' + p_n(x) y_n = 0 & \Big| \cdot C_n \end{array}\right.$$

Умножим каждое уравнение на константу $C_1, \ C_2, \ \ldots, \ C_n$, где $C_i \neq 0, \ i = \overline{1, n}$.

$$\begin{aligned} \left(C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}\right) & + p_1(x) \left(C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}\right) + \\ & + \ldots + \\ & + p_{n-1}(x) \left(C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'\right) + \\ & + p_n(x) \left(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n\right) = 0 \end{aligned}$$

По свойству производной:

$$\begin{aligned} (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n)^{(n)} & + p_1(x) (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n)^{(n-1)} + \\ & + \ldots + \\ & + p_{n-1}(x) (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n)' + \\ & + p_n(x) (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n) = 0 \end{aligned}$$

Обозначим $y' = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \text{ — решение ЛОДУ n-го порядка}$$

$\blacksquare$

## 2.8 Вывести формулу Остроградского - Лиувилля для линейного ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{3}$$

Пусть $y_1$ и $y_2$ — два частных решения ЛОДУ (1). Для $y_1$ и $y_2$ верны равенства:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot\,(-y_2) \\ \cdot\, y_1 \end{array} \right. \text{«+»}$$

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' + p_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) + p_2(x)(\cancel{y_1y_2 - y_1y_2}) = 0 \tag{4}$$

Введём обозначение:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

$$\Big(W(x)\Big)' = \Big(y_1y_2' - y_2y_1'\Big)' = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - y_1''y_2 - \cancel{y_1'y_2'} = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

(2) примет вид:

$$\begin{aligned}
W' + p_1(x)\cdot W &= 0 \text{ ДУ с разделяющимися переменными} \\
W' &= -p_1(x)\cdot W \\
\frac{dW}{dx} &= -p_1(x)\cdot W \quad \Big| \; : W \neq 0 \quad \Big| \cdot dx \\
\frac{dW}{W} &= -p_1(x)\,dx \\
\ln|W| &= -\int p_1(x)\,dx + C,\ \forall C - const \\
e^{\ln|W|} &= e^{-\int p_1(x)dx}\cdot e^C \\
|W| &= e^{-\int p_1(x)dx}\cdot C_1,\ \forall C_1 = e^C > 0 \\
W &= C_2\cdot e^{-\int p_1(x)dx},\ \forall C_2 = \pm C_1 \neq 0
\end{aligned}$$

$W = 0$ — особое решение

$$\boxed{W = C_3\cdot e^{-\int p_1(x)dx},\ \forall C_3 - const}$$

Формула Остроградского-Лиувилля

**Замечание.** Формула Остроградского-Лиувилля для ЛОДУ n-го порядка имеет тот же вид, что и для ЛОДУ 2-го порядка, где $p_1(x)$ — коэффициент при $(n-1)$-ой производной при условии, что коэффициент при n-ой производной равен 1.

## 2.9 Вывести формулу для общего решения линейного однородного ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad a_1, a_2 - const \qquad \text{ЛОДУ} \tag{1}$$
$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \qquad \text{характеристическое уравнение}$$
$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$\boxed{\text{1 случай}}$ $D > 0 \;\Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня.

$$k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{k_1 x} \\ y_2 = e^{k_2 x} \end{cases}$$

Покажем, что $y_1$ и $y_2$ линейно независимы, то есть образуют ФСР ЛОДУ (1):

$$W(X) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1)$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{(k_1+k_2)x} \neq 0,\ \forall x \in I \\ k_2 - k_1 \neq 0,\ \text{т.к. } k_2 \neq k_1 \end{array}\right\} \Rightarrow W(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{функции } y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x} \text{ лин. зависимы} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \text{ФСР ЛОДУ (1)}$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ*:

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

## 2.10 Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad a_1, a_2 - const \qquad \text{ЛОДУ} \tag{1}$$
$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \qquad \text{характеристическое уравнение}$$
$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$D < 0 \;\Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет комплексные корни.

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i \qquad i - \text{мнимая единица},\ \sqrt{-1} = i$$

$\alpha$ — действительная часть $\qquad \beta$ — мнимая часть
Формула Эйлера:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{cases}$$

По корням характеристического уравнения находим частные решения ЛОДУ (1).
$k_1 = \alpha + \beta i$:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)}$$

$k_2 = \alpha - \beta i$:

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} = \boxed{e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)}$$

Найдём действительные решения ЛОДУ (1). Составим линейные комбинации:

$$\widetilde{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\widetilde{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Из свойств частных решений ЛОДУ следует (**с.??**), что $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ — тоже решения ЛОДУ (как линейная комбинация).
Покажем, что $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \widetilde{y_1} & \widetilde{y_2} \\ \widetilde{y_1}' & \widetilde{y_2}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{\alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x} + \beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x - \cancel{\alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x\sin\beta x} + \beta e^{2\alpha x}\sin^2\beta x =$$

$$= e^{2\alpha x}\beta \cdot 1 \neq 0 \qquad \text{т.к } e^{2\alpha x} \neq 0\ \forall x \in I$$

$\beta \neq 0$, так как если $\beta = 0$, то $k_1 = k_2 = \alpha$ — действительные корни

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \widetilde{y_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \widetilde{y_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}\right\} \text{ линейно независимы } \Rightarrow \text{ ФСР}$$

По теореме *о структуре решений ЛОДУ* (**Т.??**):

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

## 2.11 Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad a_1, a_2 - const \qquad \text{ЛОДУ} \tag{1}$$

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0} \qquad \text{характеристическое уравнение}$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$D = 0 \ \Rightarrow$ характеристическое уравнение имеет два действительных равных между собой корня / один корень кратности два.

$$k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R} \qquad k = -\frac{a_1}{2}$$

$$y_1 = e^{kx}$$

Найдём $y_2$ — частное решение ЛОДУ (1) по известному частному решению $y_1$, причём $y_1$ и $y_2$ линейно независимы:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p_1(x)dx}\,dx = \left|\begin{matrix} p_1(x) = a_1 - const \\ y_1 = e^{kx},\ k \in \mathbb{R} \end{matrix}\right| = e^{kx}\int \frac{1}{e^{2kx}} \cdot e^{-\int a_1 dx} =$$

$$= e^{-\frac{a_1}{2}x}\int \frac{1}{\cancel{e^{-a_1 x}}} \cdot \cancel{e^{-a_1 x}}\,dx = e^{-\frac{a_1}{2}x}\int dx = e^{-\frac{a_1}{2}x}x$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 &= xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{aligned}\right\} \text{ два частных решения ЛОДУ (1)}$$

Покажем, что $y_1$ и $y_2$ линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a_1}{2}x} & xe^{-\frac{a_1}{2}x} \\ -\frac{a_1}{2}e^{-\frac{a_1}{2}x} & e^{-\frac{a_1}{2}x} - \frac{a_1}{2}xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{vmatrix} = e^{-a_1x} - \cancel{\frac{a_1}{2}xe^{-a_1x}} + \cancel{\frac{a_1}{2}xe^{-a_1x}} =$$
$$= e^{-a_1x} \neq 0,\ \forall x \in I \ \Rightarrow\ y_1, y_2 \text{ лин. нез. } \Rightarrow \text{ образуют ФСР}$$

ФСР ЛОДУ (1):

$$\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \\ y_2 = xe^{-\frac{a_1}{2}x} \end{cases}$$

По теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**Т.??**):

$$y_{\text{оо}} = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{-\frac{a_1}{2}x} + C_2xe^{-\frac{a_1}{2}x}$$

## 2.12 Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных

Рассмотрим ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{5}$$
$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad \text{ЛОДУ} \tag{6}$$

$p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — функции.
Пусть $y_1$ и $y_2$ — это ФСР ЛОДУ (2). Тогда по теореме *о структуре общего решения ЛОДУ* (**Т.??**):

$$y_{\text{оо}} = \underbrace{C_1y_1 + C_2y_2}_{\text{ФСР ЛОДУ}} \qquad C_1,\, C_2 - \forall const$$

Метод Лагранжа: предполагаемый вид решения ЛНДУ (1):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{7}$$

$C_1(x)$, $C_2(x)$ — некоторые функции.
Вычислим:

$$y_{\text{он}}' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = \underbrace{C_1'y_1 + C_2'y_2}_{0} + C_1y_1' + C_2y_2'$$

**Первое дополнительное условие Лагранжа**:

$$\boxed{C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{он}}' &= C_1y_1' + C_2y_2' \\ y_{\text{он}}'' &= C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' \end{aligned}$$

$y_{\text{он}}$, $y'_{\text{он}}$, $y''_{\text{он}}$ в (1):

$$C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + p_1(x)\cdot\big(C_1y_1' + C_2y_2'\big) + p_2(x)\big(C_1y_1 + C_2y_2\big) = f$$

Группируем:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1\underbrace{\left(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\right)}_{0} + C_2\underbrace{\left(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\right)}_{0} = f$$

Так как $y_1, y_2$ — решения ЛОДУ (2), то
**Второе условие Лагранжа**:

$$\boxed{C_1'y_1' + C_2'y_2' = f}$$

Предполагаемое решение (3) будет являться решением ЛНДУ (1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f \end{cases} \text{ — \textbf{система варьируемых переменных}}$$

Определяем из системы варьируемых переменных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

$$C_1'(x) = \varphi(x) \qquad C_2'(x) = \Psi(x)$$

Интегрируем:

$$C_1(x) = \int \varphi(x)\,dx + k_1, \quad \forall k_1 - const$$
$$C_2(x) = \int \Psi(x)\,dx + k_2, \quad \forall k_2 - const$$

Подставляем $C_1(x),\ C_2(x)$ в (3):

$$y_{\text{он}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \left(\int \varphi(x)\,dx + k_1\right)y_1 + \left(\int \Psi(x)\,dx + k_2\right)y_2 =$$
$$= \underbrace{k_1y_1 + k_2y_2}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{y_1\int \varphi(x)\,dx + y_2\int \Psi(x)\,dx}_{y_{\text{чн}}}$$

Система варьируемых переменных имеет единственное решение, так как определитель — это определитель Вронского.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{т.к. } y_1 \text{ и } y_2 \text{ ФСР ЛОДУ}$$